EJERCICIO (Capitulo 3 – Curso Teoría Cuántica de Campos)
Por Edriper

Se pide hallar el *promedio* de las funciones x, x^2 y x^{2n} y se ha definido el promedio de una función f(x) al que se notará <f(x)> como la siguiente cantidad:

$$\langle f(x)\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\frac{-ax^2}{2}}dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ax^2}{2}}dx}$$

Desarrollo:
a) hallar el promedio de x

$$\langle x\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{\frac{-ax^2}{2}}dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ax^2}{2}}dx}$$

para la integral del denominador: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ax^2}{2}}dx$, se hará uso del resultado obtenido en el video:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{b}}$$ en el cual reemplazando b por a/2 tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-a}{2}x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{a}{2}\right)}}=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

para la integral del numerador:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{\frac{-ax^2}{2}}dx$$

se observa que el coeficiente de la exponencial es *casi (excepto por una constante de proporcionalidad)* la derivada de la función exponente de la exponencial, es decir

$$\int k\,g'(x)e^{g(x)}dx$$

la cual se puede resolver simplemente con la substitución y=g(x) que implica que dy = g'(x)dx y haciendo el reemplazo se tiene:

$$\int k\,e^{y}dy=k\,e^{y}$$

y deshaciendo el reemplazo

$$\int k\, g'(x)\, \mathrm{e}^{g(x)}\, dx = k\, \mathrm{e}^{g(x)}$$

para nuestro caso tendremos:

$$g(x) = -\frac{a}{2}x^2$$
$$g'(x) = -ax$$
$$kg'(x) = k(-ax) = x$$

k g'(x) es el coeficiente de la exponencial en la integral que en nuestro caso es x y por otro lado dado que derivando g(x) se tiene k g'(x) = k(-ax), con lo que,

$$k = -\frac{1}{a}$$

$$\int \left(-\frac{1}{a}\right)(-ax)\, \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx = \int x\, \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}$$

integral impropia que debemos ahora evaluar entre menos infinito e infinito con lo que tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{a}\left[\mathrm{e}^{-\infty} - \mathrm{e}^{-\infty}\right] = -\frac{1}{a}[0-0] = 0$$

finalmente reemplazando el valor de sendas integrales obtenemos

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\, \mathrm{e}^{\frac{-a x^2}{2}}\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-a x^2}{2}}\, dx} = \frac{0}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = 0$$

b: Obtener el *promedio* de x²

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{\frac{-a x^2}{2}}\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-a x^2}{2}}\, dx}$$

Ya conocemos el valor de la integral del denominador que es la misma del caso anterior:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-a}{2}x^2}\, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

para la integral de numerador $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{\frac{-a x^2}{2}}\, dx$ haremos uso del resultado obtenido en el video según el cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b^{3/2}}$$ en la cual se reemplazando *b* por *a/2* tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}} = \frac{2^{3/2}\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a^3}}$$

Ahora reeemplazando el valor de las integrales tenemos el resultado final

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\frac{-ax^2}{2}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ax^2}{2}} dx} = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{a^3}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = \sqrt{\frac{2\pi a}{2\pi a^3}} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$$

c: Obtener el *promedio* de x^{2n}

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{\frac{-ax^2}{2}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ax^2}{2}} dx}$$

Nuevamente la integral del denominador es conocida:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-a}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

y la integral del numerador se extrapolara el procedimiento para encontrar la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$, el cual partío de tomar el resultado previo $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ como una función de *a* y derivar dicha función $f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. En esta ocasión tomaremos la derivada n-esima así:

por una parte

$$f^{(n)}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n e^{-ax^2}}{da^n} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-x^2)^n e^{-ax^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx$$

y por otra parte

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)}{da^n} = \sqrt{\pi}\frac{d^n}{da^n}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = \sqrt{\pi}\frac{d^n}{da^n}\left(a^{-1/2}\right) \qquad (i)$$

en este punto debemos observar que al derivar $\left(a^{-1/2}\right)$ obtenemos $\frac{-1}{2}a^{\frac{-1}{2}-1}$ al derivar esta última para obtener la derivada segunda de $\left(a^{-1/2}\right)$ tendremos $\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)a^{\frac{-1}{2}-2}$ y así susecivamente luego para la n-esima derivada tendremos

$$\frac{d^n}{da^n}\left(a^{-1/2}\right)=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{-1}{2}-(n-1)\right)a^{\frac{-1}{2}-n}$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{-1-2(n-1)}{2}\right)a^{\frac{-1-2n}{2}}$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{-1-2n+2}{2}\right)a^{\frac{-(2n+1)}{2}}$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{-2n+1}{2}\right)a^{\frac{-(2n+1)}{2}}$$ factorizando -1/2 de los n factores

$$=\left(\frac{-1}{2}\right)^n(1)(3)\ldots(2n-1)a^{\frac{-(2n+1)}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n}(1)(3)\ldots(2n-1)\sqrt{\frac{1}{a^{2n+1}}}$$

resultado que ahora reemplazamos en la ecuación *(i)*

$$f^{(n)}(a)=\frac{d^n\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)}{da^n}=\sqrt{\pi}\frac{d^n}{da^n}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)=\sqrt{\pi}\frac{d^n}{da^n}\left(a^{-1/2}\right)$$

$$f^{(n)}(a)=\frac{d^n\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)}{da^n}=\sqrt{\pi}\frac{d^n}{da^n}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)=\sqrt{\pi}\frac{d^n}{da^n}\left(a^{-1/2}\right)=\sqrt{\pi}\frac{(-1)^n}{2^n}(1)(3)\ldots(2n-1)\sqrt{\frac{1}{a^{2n+1}}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n}(1)(3)\ldots(2n-1)\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$$

igualando ambas expresiones de $f^{(n)}(a)$ esto es

$$f^{(n)}(a)=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{(-1)^n}{2^n}(1)(3)\ldots(2n-1)\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$$

se obtiene :

$$(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{(-1)^n}{2^n}(1)(3)\ldots(2n-1)\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2^n}(1)(3)\ldots(2n-1)\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$$

siendo esta última muy parecida a la integral del numerado del *promedio* de $\boldsymbol{x^{2n}}$ pero se debe reemplazar la constante a por la mitad de su valor así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{1}{2^n}(1)(3)...(2n-1)\sqrt{\frac{\pi}{(\frac{a}{2})^{2n+1}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{1}{2^n}(1)(3)...(2n-1)\sqrt{\frac{\pi}{(\frac{a}{2})^{2n+1}}}$$

$$=(1)(3)...(2n-1)\sqrt{\frac{2^{2n+1}\pi}{2^{2n}a^{2n+1}}} \qquad \textit{introduciendo} \quad \frac{1}{2^n} \quad \textit{al radical}$$

$$=(1)(3)...(2n-1)\sqrt{\frac{2\pi}{a^{2n+1}}}$$

ahora tenemos lo necesario para encontrar el promedio de x^{2n}

$$\langle x^{2n}\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{\frac{-ax^2}{2}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ax^2}{2}} dx} = \frac{(1)(3)...(2n-1)\sqrt{\frac{2\pi}{a^{2n+1}}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}}$$

$$= \frac{(1)(3)...(2n-1)\sqrt{\frac{2\pi}{a^{2n+1}}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}}$$

$$=(1)(3)...(2n-1)\sqrt{\frac{2\pi a}{2\pi a^{2n+1}}}$$

$$=(1)(3)...(2n-1)\sqrt{\frac{1}{a^{2n}}}$$

$$=(1)(3)...(2n-1)\frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$$

… puesto así para usar el simbolo de la productoria que nunca lo había usado ;D

a proposito creo que hay un error en el video sobre este resultado